

# Tema 4

## Problemas

Alfonso V. Ramallo

[1] Un sistema de dos partículas que pueden estar en dos estados ortogonales  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  esta en el estado puro cuyo vector de estado es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1,1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1,2\rangle .$$

Sea  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  la matriz densidad correspondiente. Calcúlese la traza parcial y la matriz densidad reducida  $\rho^{(2)} = \text{Tr}_1 \rho$  para la segunda de las partículas. ¿Es  $\rho^{(2)}$  la matriz densidad de un estado puro de la partícula 2?

### Solucion

El vector dual de  $|\psi\rangle$  es:

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1,1| + \frac{2}{\sqrt{5}}\langle 1,2| .$$

Por lo tanto la matriz densidad asociada al estado de las dos partículas es:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{5}|1,1\rangle\langle 1,1| + \frac{2}{5}|1,1\rangle\langle 1,2| + \frac{2}{5}|1,2\rangle\langle 1,1| + \frac{4}{5}|1,2\rangle\langle 1,2| .$$

Hagamos la traza sobre los estados de la primera partícula utilizando que  $\text{Tr}[|a\rangle\langle b|] = \langle b|a\rangle$ :

$$\text{Tr}_1 [ |1,1\rangle\langle 1,1| ] = |1\rangle\langle 1| , \quad \text{Tr}_1 [ |1,1\rangle\langle 1,2| ] = |1\rangle\langle 2| ,$$

$$\text{Tr}_1 [ |1,2\rangle\langle 1,1| ] = |2\rangle\langle 1| , \quad \text{Tr}_1 [ |1,2\rangle\langle 1,2| ] = |2\rangle\langle 2| ,$$

En consecuencia, la matriz densidad reducida para la partícula 2 es:

$$\rho^{(2)} = \text{Tr}_1 \rho = \frac{1}{5}|1\rangle\langle 1| + \frac{2}{5}|1\rangle\langle 2| + \frac{2}{5}|2\rangle\langle 1| + \frac{4}{5}|2\rangle\langle 2| .$$

Escrita en forma de matriz en la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ , el operador  $\rho^{(2)}$  es:

$$\rho^{(2)} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Para saber si  $\rho^{(2)}$  corresponde a un estado puro de la partícula 2, calculemos su cuadrado:

$$[\rho^{(2)}]^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Es decir se verifica que  $[\rho^{(2)}]^2 = \rho^{(2)}$ , y por lo tanto  $\rho^{(2)}$  corresponde a un estado puro. De hecho se puede escribir como:

$$\rho^{(2)} = |\phi\rangle\langle\phi| ,$$

siendo  $|\phi\rangle$  el siguiente vector en el espacio de Hilbert de la partícula 2:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle .$$

[2] Considerese un espacio de Hilbert bidimensional y sea  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  una base ortonormal formada por los autoestados del hamiltoniano con energías  $E_1$  y  $E_2$  ( $H|i\rangle = E_i|i\rangle$ ). Sean  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  los estados:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle , \quad |\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|2\rangle .$$

Supongamos que se prepara una mezcla estadística con un 75% de estados  $|\psi_1\rangle$  y un 25% de estados  $|\psi_2\rangle$ . Obtenganse los elementos de la matriz densidad  $\rho$  en la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ . ¿Cuál es la probabilidad de obtener  $E_2$  al medir la energía?

## Solucion

La matriz densidad para este colectivo es:

$$\rho = \frac{3}{4}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{4}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| .$$

Substituyendo las expresiones explícitas de los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ , el operador  $\rho$  puede ponerse como:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{3}{4} \frac{1}{3} (|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle)(\langle 1| + \sqrt{2}\langle 2|) + \frac{1}{4} \frac{1}{3} (\sqrt{2}|1\rangle + i|2\rangle)(\sqrt{2}\langle 1| - i\langle 2|) = \\ &= \frac{1}{12} \left[ (3+2)|1\rangle\langle 1| + (6+1)|2\rangle\langle 2| + \sqrt{2}(3-i)|1\rangle\langle 2| + \sqrt{2}(3+i)|2\rangle\langle 1| \right].\end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\rho = \frac{5}{12}|1\rangle\langle 1| + \frac{7}{12}|2\rangle\langle 2| + \frac{\sqrt{2}(3-i)}{12}|1\rangle\langle 2| + \frac{\sqrt{2}(3+i)}{12}|2\rangle\langle 1|.$$

En forma de matriz  $\rho$  toma la forma:

$$\rho = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2}(3-i) \\ \sqrt{2}(3+i) & 7 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la probabilidad de obtener el valor  $E_2$  al medir la energía es

$$P(E_2) = \langle 2|\rho|2\rangle = \frac{7}{12},$$

donde hemos leído directamente el elemento 22 de la matriz anterior. Otra forma de calcular esta probabilidad es a partir directamente de la expresión de  $\rho$  en términos de los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ :

$$\begin{aligned}P(E_2) &= \frac{3}{4} \langle 2|\psi_1\rangle\langle \psi_1|2\rangle + \frac{1}{4} \langle 2|\psi_2\rangle\langle \psi_2|2\rangle = \frac{3}{4} \left| \langle 2|\psi_1\rangle \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \langle 2|\psi_2\rangle \right|^2 = \\ &= \frac{3}{4} \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

**[3]** Un sistema de tres partículas (3 qubits) se encuentra en el estado:

$$|\psi\rangle = \left( \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}} \right) |+++ \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |++-\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |+--\rangle + \frac{i}{2} |---\rangle,$$

siendo  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  los autovectores de  $\sigma_3$  con autovalores  $+1$  y  $-1$ . ¿Cuál son las probabilidades de que al medir  $\sigma_3$  en el primer qubit obtengamos  $+1$  y  $-1$ ? ¿Cuáles son los estados del sistema inmediatamente después de estas medidas?

**Solucion**

La probabilidad de medir  $\sigma_3 = +1$  en el primer qubit es igual a la probabilidad de tener  $\sigma_3 = +1$  en el primero de los tres vectores que entran en  $|\psi\rangle$ , es decir:

$$P_+ = \frac{|\sqrt{2} + i|^2}{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{2+1}{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

Haciendo la suma, obtenemos:

$$P_+ = \frac{3}{4}.$$

De forma similar La probabilidad de medir  $\sigma_3 = -1$  en el primer qubit es:

$$P_- = \frac{|i|^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

El estado normalizado despues de medir  $\sigma_3 = +1$  en el primer qubit es:

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \left[ \left( \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{20}} \right) |+++ \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |++-\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |+-- \rangle \right].$$

Analogamente, el estado normalizado despues de medir  $\sigma_3 = -1$  en el primer qubit es:

$$i |--- \rangle.$$

[4] Un sistema de dos partículas de spin 1/2 interacciona de forma que el hamiltoniano tiene la forma:

$$H = J\sigma_z \otimes \sigma_z,$$

donde  $J$  es una constante. Encuentrense los autoestados y autovalores del hamiltoniano. Supongamos que en el instante inicial  $t = 0$  el sistema está en un estado (no entrelazado) :

$$|\psi(0)\rangle = |+x, +x\rangle,$$

donde  $|+x, +x\rangle$  es el vector en el cual las dos particulas tienen componente positiva del espín a lo largo del eje  $x$ . ¿Cómo evoluciona este estado con el tiempo?. Encuentrense los valores del tiempo  $t$  en los cuales el estado no está entrelazado.

## Solucion

Los autovectores de  $H$  se obtienen haciendo productos tensoriales de autovectores de  $\sigma_z$ . Si definimos:

$$|s\rangle \equiv |sz\rangle \quad \implies \quad \sigma_z |s\rangle = s |s\rangle, \quad (s = \pm),$$

y consideramos los productos tensoriales:

$$|s, s'\rangle \equiv |s\rangle \otimes |s'\rangle .$$

Tenemos:

$$H |s, s'\rangle = J\sigma_z \otimes \sigma_z |s, s'\rangle = J s s' |s, s'\rangle .$$

Es decir, los estados  $|s, s'\rangle$  son autovectores del hamiltoniano  $H$ :

$$|+, +\rangle , |-, -\rangle \quad \Longrightarrow \quad \text{autoestados de } H \text{ con autovalor } +J ,$$

$$|+, -\rangle , |-, +\rangle \quad \Longrightarrow \quad \text{autoestados de } H \text{ con autovalor } -J .$$

Puesto que el autoestado de  $\sigma_x$  con autovalor  $+1$  es:

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) ,$$

el estado inicial de las dos partículas es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} (|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle) .$$

Es decir:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} [ |+, +\rangle + |+, -\rangle + |-, +\rangle + |-, -\rangle ] .$$

Para obtener la evolución temporal, sustituimos:

$$|s, s'\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |s, s'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} s s' J t} |s, s'\rangle ,$$

o, mas en detalle:

$$|+, +\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} J t} |+, +\rangle , \quad |-, -\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} J t} |-, -\rangle ,$$

$$|+, -\rangle \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} J t} |+, -\rangle , \quad |-, +\rangle \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} J t} |-, +\rangle .$$

Ello quiere decir que el estado del sistema en el instante  $t$  es:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} J t} |+, +\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} J t} |+, -\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} J t} |-, +\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar} J t} |-, -\rangle \right] .$$

Obtengamos este resultado de otra forma:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} J t \sigma_z \otimes \sigma_z} |\psi(0)\rangle .$$

Tengamos ahora en cuenta que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} J t \sigma_z \otimes \sigma_z} = \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] - i \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z ,$$

y, en consecuencia:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |s, s'\rangle = \left( \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] - i s s' \sin \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] \right) |s, s'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} s s' J t} |s, s'\rangle ,$$

que es el mismo resultado que habiamos obtenido antes. En general, si representamos  $|\psi(t)\rangle$  en la forma:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{s, s' = \pm} C_{s s'} |s, s'\rangle ,$$

entonces el estado no estara entrelazado si los coeficientes  $C_{s s'}$  satisfacen:

$$C_{++} C_{--} = C_{+-} C_{-+} .$$

En nuestro caso estos coeficientes valen:

$$C_{++} = C_{--} = \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} J t} , \quad C_{+-} = C_{-+} = \frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar} J t} .$$

Por lo tanto

$$C_{++} C_{--} = \frac{1}{4} e^{-\frac{i}{\hbar} 2 J t} , \quad C_{+-} C_{-+} = \frac{1}{4} e^{\frac{i}{\hbar} 2 J t} ,$$

y la condicion para que no haya entrelazamiento es:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} 2 J t} = e^{\frac{i}{\hbar} 2 J t} \quad \implies \quad e^{\frac{i}{\hbar} 4 J t} = 1 ,$$

Es decir el tiempo  $t$  debe de ser igual a  $t_n$ , siendo:

$$\frac{4 J t_n}{\hbar} = 2\pi n , \quad \implies \quad \boxed{t_n = \frac{\hbar}{2J} n\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) .$$

[5] Considerese un sistema de dos partículas 1 y 2 distinguibles que no interactúan entre sí y que están confinadas en un mismo pozo de potencial. El hamiltoniano total tiene la forma:

$$H_{tot} = H \otimes 1 + 1 \otimes H ,$$

siendo  $H$  el hamiltoniano de una partícula correspondiente al pozo de potencial. Sean  $|i\rangle$  los autoestados de  $H$  con energía  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Supongase que este sistema de dos partículas está en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |1, 1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} |1, 2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2, 1\rangle ,$$

siendo  $|i, j\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$  el vector en el cual la partícula 1 está en el estado  $|i\rangle$  y la partícula 2 en el estado  $|j\rangle$ .

a) ¿Es  $|\psi\rangle$  un estado entrelazado?

b) Supongase que se mide primero la energía de la partícula 1 y luego la de la partícula 2. ¿Cuáles son las probabilidades de obtener  $E_1$  en ambas medidas?

c) Si se invierte el orden de las medidas y primero se mide la energía de la partícula 2, ¿Cuáles son ahora las probabilidades de obtener  $E_1$  en ambas medidas?

## Solucion

(a) Un estado general en este sistema:

$$|\psi\rangle = a_{11}|1, 1\rangle + a_{12}|1, 2\rangle + a_{21}|2, 1\rangle + a_{22}|2, 2\rangle ,$$

es separable si los coeficientes  $a_{ij}$  verifican:

$$a_{11} a_{22} = a_{12} a_{21} .$$

En nuestro caso

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}} , \quad a_{22} = 0 \quad a_{12} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} , \quad a_{21} = \frac{1}{\sqrt{5}} ,$$

y la condición de separabilidad no se verifica. Por lo tanto  $|\psi\rangle$  es un estado entrelazado.

(b) Si obtenemos  $E_1$  para el resultado de la medida de la energía de la partícula 1, entonces el estado reducido es:

$$|\psi\rangle_{red} = N \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} |1, 1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} |1, 2\rangle \right] ,$$

siendo  $N$  una constante de normalizacion. La probabilidad de obtener  $E_1$  en esta medida sera:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} .$$

El estado reducido normalizado es:

$$|\psi\rangle_{red} = N \left[ |1, 1\rangle + \sqrt{3}|1, 2\rangle \right] .$$

Si en este estado medimos la energia de la particula 2, la probabilidad de obtener  $E_1$  sera  $\frac{1}{4}$ . Asi pues, si se efectuan en este orden, primero la particula 1 y despues la 2, la probabilidades de obtener  $E_1$  como resultado son:

$$\boxed{P(H_1 = E_1) = \frac{4}{5}} \quad \boxed{P(H_2 = E_1) = \frac{1}{4}}$$

(c) Si obtenemos  $E_1$  al medir  $H_2$  en  $|\psi\rangle$ , entonces el estado reducido es:

$$|\psi\rangle_{red} = N \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} |1, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2, 1\rangle \right] .$$

La probabilidad de que esto suceda es:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} .$$

El estado reducido normalizado es:

$$|\psi\rangle_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1, 1\rangle + |2, 1\rangle \right] .$$

La probabilidad de medir  $H_1$  y obtener el valor  $E_1$  en  $|\psi\rangle_{red}$  es  $\frac{1}{2}$ . Entonces, si efectuamos las medidas en el orden opuesto al apartado (a), obtenemos las probabilidades:

$$\boxed{P(H_1 = E_1) = \frac{1}{2}} \quad \boxed{P(H_2 = E_1) = \frac{2}{5}}$$

**[6]** Consideremos un sistema de dos qubits que esta en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4} \left[ (1+i)|0, 0\rangle + 2|0, 1\rangle + i|1, 0\rangle + 3|1, 1\rangle \right] ,$$

donde  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son autovectores normalizados de un operador  $O$  correspondientes a los autovalores 0 y 1.

a) Se hace un primera medida de  $O$  en el primer qubit y se obtiene el valor 0. ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?.

b) Si se hace inmediatamente despues una segunda medida de  $O$  en el segundo qubit, ¿Cuál es la probabilidad de obtener tambien el valor 0?.

## Solucion

(a) Si la primera medida de  $O$  en el primer qubit da como resultado 0, el estado reducido sera:

$$|\psi\rangle_{red} = N \left[ (1+i)|0,0\rangle + 2|0,1\rangle \right],$$

donde  $N$  se fija imponiendo la condicion de normalizacion de  $|\psi\rangle_{red}$ . La probabilidad de obtener esta medida sera:

$$\frac{1}{16} \left[ |1+i|^2 + 4 \right] = \frac{1}{16} (2+4) = \frac{3}{8}.$$

Observemos que  $N$  debe de satisfacer:

$$N^2 (2+4) = 1 \quad \implies \quad N = \frac{1}{6}.$$

Por consiguiente el estado reducido despues de efectuar la medida es:

$$|\psi\rangle_{red} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ (1+i)|0,0\rangle + 2|0,1\rangle \right].$$

(b) La probabilidad de medir el valor de  $O$  y obtener 0 en el segundo qubit inmediatamente despues de obtener el valor cero en el primer qubit se puede leer del estado  $|\psi\rangle_{red}$  escrito mas arriba y es igual a:

$$\frac{|1+i|^2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

[7] Un sistema de dos partículas de spin 1/2 interacciona de forma que el hamiltoniano tiene la forma:

$$H = J\sigma_x \otimes \sigma_x,$$

donde  $J$  es una constante. En el instante  $t = 0$  el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = | + z, -z \rangle,$$

siendo  $| + z, -z \rangle = | + z \rangle \otimes | - z \rangle$ , con  $\sigma_z | \pm z \rangle = \pm | \pm z \rangle$ .

a) Obtengase el operador de evolucion temporal y el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  para un instante de tiempo  $t > 0$ . ¿Para que valores de  $t$  es  $|\psi(t)\rangle$  un estado factorizado?.

b) Calculese la matriz densidad reducida para la particula 1 para  $t > 0$  y el correspondiente vector de Bloch. ¿Para que valores de  $t$  esta matriz densidad representa un estado puro?.

## Solucion

(a) La evolucion temporal del estado es:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle ,$$

con  $H = J\sigma_x \otimes \sigma_x$ . Dado que para  $n \geq 0$  se verifica:

$$\left(\sigma_x \otimes \sigma_x\right)^{2n} = 1 \otimes 1 , \quad \left(\sigma_x \otimes \sigma_x\right)^{2n+1} = \sigma_x \otimes \sigma_x ,$$

Tenemos:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{i J t}{\hbar} \sigma_x \otimes \sigma_x} = \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] 1 \otimes 1 - i \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] \sigma_x \otimes \sigma_x .$$

Entonces:

$$|\psi(t)\rangle = \left[ \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] 1 \otimes 1 - i \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] \sigma_x \otimes \sigma_x \right] | + z, -z \rangle .$$

Como:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x | + z, -z \rangle = | - z, +z \rangle ,$$

el estado  $|\psi(t)\rangle$  es:

$$|\psi(t)\rangle = \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] | + z, -z \rangle - i \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] | - z, +z \rangle .$$

Si, en general un estado de la forma:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha | + z, +z \rangle + \beta | + z, -z \rangle + \gamma | - z, +z \rangle + \delta | - z, -z \rangle ,$$

es factorizado si

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 0 .$$

En nuestro caso estos coeficientes valen:

$$\alpha = \delta = 0 , \quad \beta = \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] , \quad \gamma = -i \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] .$$

Entonces:

$$\alpha \delta - \beta \gamma = i \cos \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{J t}{\hbar} \right] ,$$

es decir:

$$\boxed{\alpha \delta - \beta \gamma = \frac{i}{2} \operatorname{sen} \left[ \frac{2 J t}{\hbar} \right]}$$

El estado factoriza, es decir no esta entrelazado, cuando  $t = t_n$ , donde  $t_n$  satisface:

$$\text{sen} \left[ \frac{2Jt_n}{\hbar} \right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2Jt_n}{\hbar} = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

Equivalentemente:

$$\text{Estado no entrelazado} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t = t_n = \frac{\pi \hbar}{2J} n} \quad n = 0, 1, \dots$$

(b) El dual del vector de estado es:

$$\langle \psi(t) | = \cos \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \langle +z, -z | + i \text{sen} \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \langle -z, +z | .$$

La matriz densidad asociada a  $|\psi(t)\rangle$  es:

$$\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| ,$$

es decir:

$$\rho = \left( \cos \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | +z, -z \rangle - i \text{sen} \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | -z, +z \rangle \right) \left( \cos \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \langle +z, -z | + i \text{sen} \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \langle -z, +z | \right) .$$

La matriz de densidad reducida para la particula 1 se obtiene haciendo la traza parcial sobre el espacio de Hilbert de la particula 2:

$$\rho^{(1)} = \text{Tr}_2 \rho$$

Calulemos las diferentes contribuciones a esta traza:

$$\cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \text{Tr}_2 \left[ | +z, -z \rangle \langle +z, -z | \right] = \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | +z \rangle \langle +z | ,$$

$$i \cos \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \text{sen} \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \text{Tr}_2 \left[ | +z, -z \rangle \langle -z, +z | \right] = 0 ,$$

$$-i \text{sen} \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \cos \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \text{Tr}_2 \left[ | -z, +z \rangle \langle +z, -z | \right] = 0 ,$$

$$\text{sen}^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \text{Tr}_2 \left[ | -z, +z \rangle \langle -z, +z | \right] = \text{sen}^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | -z \rangle \langle -z | .$$

En consecuencia:

$$\boxed{\rho^{(1)} = \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | +z \rangle \langle +z | + \text{sen}^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] | -z \rangle \langle -z |}$$

En forma de matriz en la base  $\{| +z \rangle, | -z \rangle\}$  este operador toma la forma:

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \end{pmatrix} .$$

Recordemos que la matriz densidad de un sistema de dos niveles puede escribirse en general en la forma:

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}) ,$$

siendo  $\vec{b}$  el vector de Bloch. Las componentes del vector de Bloch se pueden relacionar con los valores de las constantes  $a$  y  $c$  en la forma:

$$a = \frac{1 + b_z}{2} , \quad c = \frac{b_x - ib_y}{2} ,$$

En nuestro caso:

$$a = \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] \quad \Longrightarrow \quad b_z = 2a - 1 = 2 \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] - 1 ,$$

$$c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b_x = b_y = 0 .$$

Observemos que  $b_z$  puede reexpresarse como:

$$b_z = \cos^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] - \sin^2 \left[ \frac{Jt}{\hbar} \right] = \cos \left[ \frac{2Jt}{\hbar} \right] .$$

Así pues, el vector de Bloch  $\vec{b}$  para la matriz densidad  $\rho^{(1)}$  es:

$$\vec{b} = \left( 0, 0, \cos \left[ \frac{2Jt}{\hbar} \right] \right) .$$

Recordemos que la matriz densidad de un estado puro debe de ser tal que su vector de Bloch tiene modulo unidad. En nuestro caso

$$|\vec{b}| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \left[ \frac{2Jt}{\hbar} \right] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = t_n = \frac{\pi \hbar}{2J} n ,$$

para  $n = 0, 1, \dots$ . Estos tiempos para los cuales la matriz densidad de la partícula 1 corresponden a un estado puro son los mismos para los cuales el estado inicial está factorizado o, equivalentemente, no está entrelazado.

[8] Un sistema de dos niveles está en un estado caracterizado por la matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{8} [5|1\rangle\langle 1| - 3i|1\rangle\langle 2| + 3i|2\rangle\langle 1| + 3|2\rangle\langle 2|] ,$$

siendo  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  una base ortonormal del espacio de Hilbert bidimensional. El hamiltoniano del sistema es:

$$H = |1\rangle\langle 1| + 4|2\rangle\langle 2| .$$

Si medimos la energía del sistema en este estado, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad?

## Solucion

Los posibles valores de la energia son los autovalores del hamiltoniano  $H$ , es decir:

$$E = 1 \rightarrow \text{autoestado } |1\rangle, \quad E = 4 \rightarrow \text{autoestado } |2\rangle.$$

Las correspondientes probabilidades son:

$$P(E = 1) = \langle 1|\rho|1\rangle = \frac{5}{8},$$

$$P(E = 4) = \langle 2|\rho|2\rangle = \frac{3}{8}.$$

[9] Un sistema de dos partículas 1 y 2 de spin 1/2 esta en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[ (1+i)|+,+\rangle + i|+,-\rangle + |-,+\rangle \right],$$

siendo  $|\sigma, \sigma'\rangle = |\sigma\rangle_1 \otimes |\sigma'\rangle_2$  para  $\sigma, \sigma' = \pm$ , donde  $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ . Supongamos que medimos el espín de la partícula 1 en la dirección  $z$  y el espín de la partícula 2 en la dirección del vector unitario  $\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ . Consideremos los sucesos en los cuales la medida de  $S_z$  para la partícula 1 da como resultado  $+\hbar/2$ .

a) ¿Cuales son las probabilidades de obtener las dos posibles proyecciones del espín de la partícula 2 en la dirección del vector  $\vec{n}$ ? ¿Cual es el valor medio de estas medidas?. Expresese el resultado en función del ángulo  $\theta$ .

b) ¿Cual es el valor de  $\theta$  que hace máximo el valor medio obtenido en el apartado a)?

## Solucion

Recordemos que si  $\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$  es un vector unitario en una dirección arbitraria del plano  $xz$ , los autovectores  $|+\vec{n}\rangle$  y  $|-\vec{n}\rangle$  del operador  $S_{\vec{n}} = \vec{S} \cdot \vec{n}$  con autovalores  $+\hbar/2$  y  $-\hbar/2$  son:

$$|+\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle,$$

$$|-\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

Escribamos el estado inicial de dos partículas en la forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |+, +\rangle + \beta |+, -\rangle + \gamma |-, +\rangle ,$$

$$\alpha = \frac{1+i}{2} , \quad \beta = \frac{i}{2} , \quad \gamma = \frac{1}{2} .$$

Al medir el espín de la partícula 1 en la dirección  $z$  y obtener  $+\hbar/2$  el estado se reduce a:

$$|\psi\rangle_{red} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} \left( \alpha |+, +\rangle + \beta |+, -\rangle \right) ,$$

donde:

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2} , \quad |\beta|^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

(a) Los estados en los que la partícula 1 tiene  $S_z = \hbar/2$  y la partícula 2 tiene  $S_{\vec{n}} = \pm\hbar/2$  son:

$$|+, +\vec{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+, +\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |+, -\rangle ,$$

$$|+, -\vec{n}\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |+, +\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |+, -\rangle .$$

Por lo tanto, las probabilidades de medir cada una de las dos componentes de  $S_{\vec{n}}$  son:

$$P_{|\psi\rangle \rightarrow |+, +\vec{n}\rangle} = \left| \langle +, +\vec{n} | \psi \rangle_{red} \right|^2 , \quad P_{|\psi\rangle \rightarrow |+, -\vec{n}\rangle} = \left| \langle +, -\vec{n} | \psi \rangle_{red} \right|^2 .$$

Los productos escalares que se necesitan para calcular estas probabilidades son:

$$\langle +, +\vec{n} | \psi \rangle_{red} = \frac{\alpha \cos \frac{\theta}{2} + \beta \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} \quad \langle +, -\vec{n} | \psi \rangle_{red} = \frac{-\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} .$$

Entonces:

$$P_{+\vec{n}} = P_{|\psi\rangle \rightarrow |+, +\vec{n}\rangle} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left( \alpha \cos \frac{\theta}{2} + \beta \sin \frac{\theta}{2} \right) \left( \alpha^* \cos \frac{\theta}{2} + \beta^* \sin \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left[ |\alpha|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |\beta|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{Re}(\alpha\beta^*) \right] ,$$

que, utilizando la fórmula del seno del ángulo doble, puede escribirse como:

$$P_{+\vec{n}} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left[ |\alpha|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |\beta|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta \operatorname{Re}(\alpha\beta^*) \right] .$$

Teniendo en cuenta los valores de  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2$ , así como que:

$$\operatorname{Re}(\alpha\beta^*) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[(1+i)(-i)] = \frac{1}{4},$$

obtenemos:

$$P_{+\vec{n}} = \frac{1}{3} \left( 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \theta \right)$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} P_{-\vec{n}} &= P_{|\psi\rangle \rightarrow |+, -\vec{n}\rangle} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left( -\alpha \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} \right) \left( -\alpha^* \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \beta^* \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left[ |\alpha|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + |\beta|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{Re}(\alpha\beta^*) \right]. \end{aligned}$$

Es decir:

$$P_{-\vec{n}} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left[ |\alpha|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + |\beta|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \theta \operatorname{Re}(\alpha\beta^*) \right].$$

Usando los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , esta última expresión se convierte en:

$$P_{-\vec{n}} = \frac{1}{3} \left( 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \theta \right)$$

El valor medio de  $S_{\vec{n}}$  es:

$$\begin{aligned} \langle S_{\vec{n}} \rangle &= \frac{\hbar}{2} [P_{+\vec{n}} - P_{-\vec{n}}] = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{3} \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \theta - 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \theta \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{3} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{sen} \theta \right]. \end{aligned}$$

Usando la fórmula del coseno del ángulo doble, podemos escribir este último resultado como:

$$\langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}{3}$$

(b) Para calcular el valor máximo de  $\langle S_{\vec{n}} \rangle$  igualemos su derivada a cero:

$$\frac{d\langle S_{\vec{n}} \rangle}{d\theta} = \frac{\hbar}{6} \left( -\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta \right) = 0.$$

Entonces el ángulo  $\theta_{max}$  que hace  $\langle S_{\vec{n}} \rangle$  máximo satisface:

$$-\operatorname{sen} \theta_{max} + 2 \cos \theta_{max} = 0 \quad \implies \quad \tan \theta_{max} = 2.$$

Es decir

$$\theta_{max} = \arctan 2 \approx 0.35 \pi$$

[10] Consideremos un sistema de dos qubits que esta en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|++\rangle - |--\rangle] ,$$

siendo  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  los autovectores de  $\sigma_3$  correspondientes a los autovalores  $+1$  y  $-1$  respectivamente. Calculese el valor esperado de  $\sigma_1 \otimes \sigma_2$  en el estado  $|\psi\rangle$ .

### Solucion

Para calcular el valor esperado de  $\sigma_1 \otimes \sigma_2$  en el estado  $|\psi\rangle$  tengamos en cuenta que:

$$\sigma_1|+\rangle = |-\rangle , \quad \sigma_1|-\rangle = |+\rangle , \quad \sigma_2|+\rangle = i|-\rangle , \quad \sigma_2|-\rangle = -i|+\rangle , .$$

Entonces:

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 |\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|--\rangle + |++\rangle) .$$

Puesto que:

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle--| + \langle++|) ,$$

Se tiene:

$$\langle\psi| \sigma_1 \otimes \sigma_2 |\psi\rangle = \frac{i}{2} (\langle--| + \langle++|) (|--\rangle + |++\rangle) = \frac{i}{2} [\langle++|++\rangle - \langle--|--\rangle] .$$

Teniendo en cuenta que  $\langle++|++\rangle = \langle--|--\rangle = 1$ , se sigue que:

$$\boxed{\langle\sigma_1 \otimes \sigma_2\rangle_\psi = 0}$$

[11] En un sistema de dos niveles sean  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  los autoestados del hamiltoniano ( $H|i\rangle = E_i|i\rangle$ ). Se prepara una mezcla estadística con un 75% del estado  $|A\rangle$  y un 25% del estado  $|B\rangle$ , donde  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  son:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) , \quad |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) .$$

Obtenganse la matriz densidad de la mezcla en la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  y la probabilidad de obtener  $E_1$  y  $E_2$  al hacer una medida de la energía.

## Solucion

La matriz densidad es:

$$\rho = \frac{3}{4} |A\rangle\langle A| + \frac{1}{4} |B\rangle\langle B|$$

Calculemos los productos externos  $|A\rangle\langle A|$  y  $|B\rangle\langle B|$ :

$$|A\rangle\langle A| = \frac{1}{2}(|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|) = \frac{1}{2} \left[ |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \right],$$

$$|B\rangle\langle B| = \frac{1}{2}(|1\rangle - |2\rangle)(\langle 1| - \langle 2|) = \frac{1}{2} \left[ |1\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \right].$$

Entonces, la matriz densidad es:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) |1\rangle\langle 1| + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) |1\rangle\langle 2| + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) |2\rangle\langle 1| + \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) |2\rangle\langle 2| \right].$$

Simplificando, obtenemos:

$$\rho = \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 2| + \frac{1}{4} |2\rangle\langle 1| + \frac{1}{2} |2\rangle\langle 2|$$

Por lo tanto, las probabilidades pedidas son:

$$p(E_1) = \langle 1|\rho|1\rangle = \frac{1}{2}$$

$$p(E_2) = \langle 2|\rho|2\rangle = \frac{1}{4}$$

[12] En el instante  $t$ , un sistema de dos partículas de espín  $1/2$  está en el estado:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos t |++\rangle + \frac{1+i}{2} |+-\rangle + \frac{1-i}{2} |-+\rangle + \sin t |--\rangle \right],$$

siendo  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  los autovectores de  $\sigma_3$  correspondientes a los autovalores  $+1$  y  $-1$  respectivamente. Obtenganse los valores de  $t$  para los cuales las partículas están en un estado factorizado y aquellos para los cuales están en un estado entrelazado.

## Solucion

El estado  $|\psi(t)\rangle$  puede escribirse como:

$$|\psi(t)\rangle = C_{++} |++\rangle + C_{+-} |+-\rangle + C_{-+} |-+\rangle + C_{--} |--\rangle,$$

siendo

$$C_{++} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \quad C_{+-} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}},$$

$$C_{-+} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \quad C_{--} = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$$

El estado estara factorizado solo cuando se verifique la siguiente condicion:

$$C_{++} C_{--} = C_{+-} C_{-+}$$

Dado que, para el estado  $|\psi(t)\rangle$ :

$$C_{++} C_{--} = \frac{1}{2} \cos t \sin t = \frac{\sin(2t)}{4}, \quad C_{+-} C_{-+} = \frac{(1+i)(1-i)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

el estado factorizara cuando  $\sin(2t) = 1$ , es decir:

Estado factorizado	$\implies$	$t = \frac{\pi}{4} + n\pi$	$(n = 0, 1, 2, \dots)$
--------------------	------------	----------------------------	------------------------

Ademas:

Estado entrelazado	$\implies$	$t \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$	$(n = 0, 1, 2, \dots)$
--------------------	------------	-------------------------------	------------------------

**[13]** Un sistema de dos particulas 1 y 2 esta en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|v\rangle \otimes |w\rangle + |w\rangle \otimes |v\rangle),$$

siendo  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  los siguientes vectores de un espacio de Hilbert bidimensional:

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Obtengase la matriz densidad reducida de la particula 1. Calculese su vector de Bloch y determinese si el subsistema constituido por la particula 1 esta en un estado puro o en una mezcla.

### Solucion

Calculemos los productos escalares de los vectores  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  entre si:

$$\langle v|v\rangle = \langle w|w\rangle = 1, \quad \langle v|w\rangle = \frac{1}{2} (1, -i) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1+i).$$

Utilizemos estos resultados para comprobar la normalización del vector  $|\psi\rangle$ . Denotemos  $|v, w\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$  y  $|w, v\rangle = |w\rangle \otimes |v\rangle$ . Puesto que:

$$\langle\psi| = \frac{1}{3} \left( \langle v, w| + \langle w, v| \right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \frac{1}{3} \left( \langle v, w| + \langle w, v| \right) \left( |v, w\rangle + |w, v\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 2\langle v|v\rangle \langle w|w\rangle + 2\langle v|w\rangle \langle w|v\rangle \right) = \frac{1}{3} \left[ 2 + \frac{1}{2} (1+i)(1-i) \right] = 1 . \end{aligned}$$

La matriz densidad  $\rho$  es:

$$\rho = \frac{1}{3} \left( |v, w\rangle + |w, v\rangle \right) \left( \langle v, w| + \langle w, v| \right) .$$

Equivalentemente:

$$\rho = \frac{1}{3} \left[ |v, w\rangle \langle v, w| + |v, w\rangle \langle w, v| + |w, v\rangle \langle v, w| + |w, v\rangle \langle w, v| \right]$$

Calculemos la traza reducida de las diferentes contribuciones a  $\rho$ :

$$\text{Tr}_2[|v, w\rangle \langle v, w|] = |v\rangle \langle v| \langle w|w\rangle = |v\rangle \langle v| ,$$

$$\text{Tr}_2[|v, w\rangle \langle w, v|] = |v\rangle \langle w| \langle v|w\rangle = \frac{1+i}{2} |v\rangle \langle w| ,$$

$$\text{Tr}_2[|w, v\rangle \langle v, w|] = |w\rangle \langle v| \langle w|v\rangle = \frac{1-i}{2} |w\rangle \langle w| ,$$

$$\text{Tr}_2[|w, v\rangle \langle w, v|] = |w\rangle \langle w| \langle v|v\rangle = |w\rangle \langle w| .$$

La matriz densidad reducida es pues:

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{3} |v\rangle \langle v| + \frac{1}{3} |w\rangle \langle w| + \frac{1+i}{6} |v\rangle \langle w| + \frac{1-i}{6} |w\rangle \langle v|$$

Calculemos las matrices correspondientes a los productos externos que aparecen en  $\rho^{(1)}$ . En primer lugar obtengamos:

$$|v\rangle \langle v| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$|w\rangle \langle w| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

entonces:

$$\frac{1}{3} [ |v\rangle\langle v| + |w\rangle\langle w| ] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -i-1 \\ i-1 & 2 \end{pmatrix} .$$

De forma similar:

$$|v\rangle\langle w| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix} ,$$

y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{6} |v\rangle\langle w| &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ i-1 & -i+1 \end{pmatrix} , \\ \frac{1-i}{6} |w\rangle\langle v| &= \left( \frac{1+i}{6} |v\rangle\langle w| \right)^\dagger = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ i-1 & i+1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Asi pues:

$$\frac{1+i}{6} |v\rangle\langle w| + \frac{1-i}{6} |w\rangle\langle v| = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sumando todas las contribuciones, obtenemos la siguiente matriz densidad reducida:

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i+1}{3} \\ \frac{i-1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puesto que:

$$[\rho^{(1)}]^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{36} & -\frac{i+1}{3} \\ \frac{i-1}{3} & \frac{17}{36} \end{pmatrix} \neq \rho^{(1)} ,$$

el estado reducido es una mezcla. El vector de Bloch correspondiente  $\vec{b}$  tiene por componentes:

$$b_z = 0 , \quad \frac{b_x}{2} = -\frac{1}{3} , \quad \frac{b_y}{2} = \frac{1}{3} .$$

Es decir  $\vec{b}$  es el vector:

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = \left( -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right)$$

cuyo modulo es:

$$\vec{b}^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} < 1 ,$$

y por lo tanto esta en el interior de la esfera de Bloch, como corresponde a una mezcla.

[14] a) Considerese dos partículas de espín 1/2 con operadores de espín  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$ . Sea  $|\phi\rangle$  el estado:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\ -\rangle - |-\ +\rangle \right),$$

donde  $|+\ -\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$  y  $|-\ +\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle$ , siendo  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  los autovectores de  $\sigma_3$  con autovalores  $+1$  y  $-1$  respectivamente. Calcúlese  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\phi\rangle$ .

b) Repítase el apartado anterior para el vector

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\ -\rangle + |-\ +\rangle \right).$$

## Solucion

a) Vamos a resolver el problema por dos métodos distintos.

### Método 1

Sea  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  el espín total del sistema de dos partículas. Entonces, su cuadrado es:

$$\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

Despejando  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ , obtenemos:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} \left( \vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 \right).$$

Tengamos ahora en cuenta que el estado  $|\phi\rangle$  tiene espín total cero, por tanto:

$$\vec{S}|\phi\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{S}^2|\phi\rangle = 0.$$

Además, para partículas de espín 1/2:

$$\vec{S}_1^2 = \vec{S}_2^2 = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \hbar^2.$$

Por consiguiente, tenemos:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\phi\rangle = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \hbar^2 |\phi\rangle,$$

es decir:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\phi\rangle = -\frac{3}{4} \hbar^2 |\phi\rangle .$$

## Metodo 2

Hagamos el calculo directamente utilizando que:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1z} S_{2z} + \frac{1}{2} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) .$$

En primer lugar tenemos que:

$$S_{1z} S_{2z} |\phi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |\phi\rangle .$$

Por otra parte:

$$S_{1+} S_{2-} |+-\rangle = 0 , \quad S_{1+} S_{2-} |-+\rangle = \hbar^2 |+-\rangle \implies S_{1+} S_{2-} |\phi\rangle = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |+-\rangle ,$$

y, de forma similar:

$$S_{1-} S_{2+} |+-\rangle = \hbar^2 |-+\rangle , \quad S_{1-} S_{2+} |-+\rangle = 0 \implies S_{1-} S_{2+} |\phi\rangle = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |+-\rangle .$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{1}{2} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) |\phi\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+-\rangle + |-+\rangle) = -\frac{\hbar^2}{2} |\phi\rangle .$$

Por lo tanto:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\phi\rangle = -\hbar^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle = -\frac{3}{4} \hbar^2 |\phi\rangle ,$$

que es el mismo resultado que el obtenido por el metodo 1.

b) Apliquemos el primer metodo del apartado anterior. Ahora el estado  $|\psi\rangle$  tiene espin total 1. Entonces:

$$\vec{S}^2 |\psi\rangle = \hbar^2 1 \cdot (1 + 1) |\psi\rangle = 2\hbar^2 |\psi\rangle ,$$

y, puesto que:

$$\vec{S}_1^2 |\psi\rangle = \vec{S}_2^2 |\psi\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\psi\rangle ,$$

tenemos:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\psi\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \left(2 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right) |\psi\rangle ,$$

que, despues de simplificar, da:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |\psi\rangle .$$

Este mismo resultado tambien se puede obtener por medio del segundo metodo empleado en el apartado a.

**[15]** Considerese un sistema constituido por dos particulas, cada una de las cuales puede estar en dos estados ortonormales  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . El estado del sistema es:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0,1\rangle + e^{i\phi}\text{sen}\theta|1,0\rangle ,$$

siendo  $|i,j\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$  y  $\theta$  y  $\phi$  son dos numeros reales. Obtengase las matrices densidad reducidas para cada una de las dos particulas y los correspondientes vectores de Bloch.

### Solucion

Puesto que:

$$\langle\psi| = \cos\theta\langle 0,1| + e^{-i\phi}\text{sen}\theta\langle 1,0| ,$$

la matriz densidad del sistema de las dos particulas es:

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = \left( \cos\theta|0,1\rangle + e^{i\phi}\text{sen}\theta|1,0\rangle \right) \left( \cos\theta\langle 0,1| + e^{-i\phi}\text{sen}\theta\langle 1,0| \right) = \\ &= \cos^2\theta|0,1\rangle\langle 0,1| + \text{sen}^2\theta|1,0\rangle\langle 1,0| + e^{-i\phi}\cos\theta\text{sen}\theta|0,1\rangle\langle 1,0| + \\ &\quad + e^{i\phi}\text{sen}\theta\cos\theta|1,0\rangle\langle 0,1| . \end{aligned}$$

La matriz densidad reducida para la particula 1 es:

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho .$$

Teniendo en cuenta que:

$$\text{Tr}_2 \left[ |0,1\rangle\langle 0,1| \right] = |0\rangle\langle 0| ,$$

$$\text{Tr}_2 \left[ |1,0\rangle\langle 1,0| \right] = |1\rangle\langle 1| ,$$

$$\text{Tr}_2 \left[ |0,1\rangle\langle 1,0| \right] = \text{Tr}_2 \left[ |1,0\rangle\langle 0,1| \right] = 0 ,$$

obtenemos:

$$\rho_1 = \cos^2 \theta |0\rangle\langle 0| + \sin^2 \theta |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Pongamos

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(1 + \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma})$$

Entonces, las componentes del vector de Bloch de la primera partícula son:

$$b_{1x} = b_{1y} = 0, \quad \frac{1}{2}(1 + b_{1z}) = \cos^2 \theta,$$

lo que implica que  $b_{1z} = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$  y, por lo tanto el vector de Bloch  $\vec{b}_1$  es:

$$\vec{b}_1 = (0, 0, \cos 2\theta).$$

Observemos que  $|\vec{b}_1| < 1$  excepto cuando  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ . Solo para estos dos valores de  $\theta$  la matriz densidad  $\rho_1$  representa un estado puro y el estado  $|\psi\rangle$  no entrelaza las dos partículas.

De forma completamente similar definimos la matriz densidad reducida para la partícula 2:

$$\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho.$$

Las trazas parciales que necesitamos para calcular  $\rho_2$  son:

$$\text{Tr}_1 [ |0, 1\rangle\langle 0, 1| ] = |1\rangle\langle 1|,$$

$$\text{Tr}_1 [ |1, 0\rangle\langle 1, 0| ] = |0\rangle\langle 0|,$$

$$\text{Tr}_1 [ |0, 1\rangle\langle 1, 0| ] = \text{Tr}_1 [ |1, 0\rangle\langle 0, 1| ] = 0.$$

Por consiguiente:

$$\rho_2 = \cos^2 \theta |1\rangle\langle 1| + \sin^2 \theta |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

De forma similar parametrizamos  $\rho_2$  en la forma:

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{b}_2 \cdot \vec{\sigma}).$$

Las componentes del vector  $\vec{b}_2$  se obtienen por inspección:

$$b_{2x} = b_{2y} = 0, \quad \frac{1}{2}(1 + b_{2z}) = \sin^2 \theta.$$

Entonces  $b_{2z} = 2\text{sen}^2\theta - 1 = -\cos 2\theta$  y el vector de Bloch para la partícula 2 es:

$$\vec{b}_2 = (0, 0, -\cos 2\theta) ,$$

que, al igual que sucedía con  $\vec{b}_1$ , está en el interior de la bola de Bloch salvo que  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ .

**[16]** Los experimentales Alice y Bob efectúan medidas en el estado de Bell  $|\phi\rangle$  de dos partículas de espín 1/2, donde:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+-\rangle - |-+\rangle \right) ,$$

siendo  $|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$ ,  $|-+\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle$  y  $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ . Alice mide el espín de la primera partícula en la dirección del vector  $\vec{a}$ , mientras que Bob hace lo mismo con la segunda partícula en otra dirección  $\vec{b}$ . Los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son unitarios y ambos están contenidos en el plano  $xz$ . Obtengase la probabilidad de que las medidas de Alice y Bob den resultados opuestos. Expresese en resultado en términos del ángulo formado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

### Solucion

Escribamos los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  en la forma:

$$\vec{a} = (\text{sen } \theta_a, 0, \cos \theta_a) , \quad \vec{b} = (\text{sen } \theta_b, 0, \cos \theta_b) ,$$

y definamos los estados  $|\pm \vec{a}\rangle$  y  $|\pm \vec{b}\rangle$  como aquellos que satisfacen:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} |\pm \vec{a}\rangle = \pm |\pm \vec{a}\rangle , \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{b} |\pm \vec{b}\rangle = \pm |\pm \vec{b}\rangle .$$

Tenemos que calcular las amplitudes:

$$\langle +\vec{a}, -\vec{b} | \phi \rangle , \quad \langle -\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle ,$$

y la probabilidad pedida es:

$$P = \left| \langle +\vec{a}, -\vec{b} | \phi \rangle \right|^2 + \left| \langle -\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle \right|^2 .$$

Calculemos la primera de estas amplitudes. Para ello utilicemos que en la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  los vectores  $|+\vec{a}\rangle$  y  $|-\vec{b}\rangle$  son:

$$|+\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_a}{2} \\ \text{sen } \frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} , \quad |-\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} -\text{sen } \frac{\theta_b}{2} \\ \cos \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix} ,$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\langle +\vec{a}, -\vec{b}|\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \langle +\vec{a}, -\vec{b}|+ -\rangle - \langle +\vec{a}, -\vec{b}|- +\rangle \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \langle +\vec{a}|+\rangle\langle -\vec{b}|- \rangle - \langle +\vec{a}|- \rangle\langle -\vec{b}|+\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\theta_a}{2} \cos \frac{\theta_b}{2} + \text{sen} \frac{\theta_a}{2} \text{sen} \frac{\theta_b}{2} \right).\end{aligned}$$

Definamos:

$$\theta_{ab} \equiv \theta_b - \theta_a ,$$

que representa el angulo formado por los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Entonces la amplitud  $\langle +\vec{a}, -\vec{b}|\phi\rangle$  puede escribirse en la forma:

$$\langle +\vec{a}, -\vec{b}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{ab}}{2} .$$

De la misma manera podemos calcular la amplitud  $\langle -\vec{a}, +\vec{b}|\phi\rangle$ :

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \langle -\vec{a}|+\rangle\langle +\vec{b}|- \rangle - \langle -\vec{a}|- \rangle\langle +\vec{b}|+\rangle \right] .$$

Puesto que:

$$|-\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} -\text{sen} \frac{\theta_a}{2} \\ \cos \frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} , \quad |+\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_b}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix} ,$$

la amplitud buscada es:

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\text{sen} \frac{\theta_a}{2} \text{sen} \frac{\theta_b}{2} - \cos \frac{\theta_a}{2} \cos \frac{\theta_b}{2} \right] .$$

Es decir:

$$\langle -\vec{a}, +\vec{b}|\phi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{ab}}{2} .$$

Por lo tanto la probabilidad de que las medidas de Alice y de Bob den resultados opuestos es:

$$P = \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} .$$

[17] Un sistema de dos partículas de espín 1/2 tiene por hamiltoniano:

$$H = S_{1z} + S_{2z} + \frac{\gamma}{\hbar} S_{1z} S_{2z} ,$$

siendo  $\gamma$  una constante y  $S_{iz}$  la componente  $z$  del espín de la  $i$ -ésima partícula ( $i = 1, 2$ ). En el instante inicial  $t = 0$  el sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} \left( |++\rangle + \sqrt{2}|+-\rangle + |--\rangle \right) ,$$

con  $|ss'\rangle = |s\rangle_1 \otimes |s'\rangle_2$  y  $\sigma_z|s\rangle = s|s\rangle$  para  $s, s' = \pm$ . Transcurrido un tiempo  $t$  se mide la componente  $z$  del espín de la partícula 1 y se obtiene  $+\hbar/2$ . Inmediatamente después de esta primera medida se mide la componente  $x$  del espín de la partícula 2. Obtengase el valor medio de los resultados de esta segunda medida como función del tiempo  $t$ .

### Solucion

Los estados  $|ss'\rangle$  son autoestados de la energía pues:

$$H|ss'\rangle = \left( \frac{\hbar}{2}(s + s') + \frac{\gamma \hbar^2}{\hbar 4} s s' \right) |ss'\rangle = E_{s,s'} |ss'\rangle ,$$

donde la energía  $E_{ss'}$  está dada por:

$$E_{ss'} = \frac{\hbar}{2} \left( s + s' + \frac{\gamma}{2} s s' \right) .$$

En particular, se tiene:

$$E_{++} = \frac{\hbar}{2} \left( 2 + \frac{\gamma}{2} \right) , \quad E_{+-} = -\frac{\hbar\gamma}{4} , \quad E_{--} = \frac{\hbar}{2} \left( -2 + \frac{\gamma}{2} \right) .$$

Puesto que son autoestados de la energía, la evolución temporal de los estados  $|++\rangle$ ,  $|+-\rangle$  y  $|--\rangle$  es:

$$|++\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} E_{++} t} |++\rangle = e^{-\frac{i}{2} \left( 2 + \frac{\gamma}{2} \right) t} |++\rangle ,$$

$$|+-\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} E_{+-} t} |+-\rangle = e^{\frac{i}{4} \gamma t} |+-\rangle ,$$

$$|--\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} E_{--} t} |--\rangle = e^{\frac{i}{2} \left( 2 - \frac{\gamma}{2} \right) t} |--\rangle .$$

Por consiguiente, el vector de estado en un instante de tiempo  $t \geq 0$  es:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{i}{2} \left( 2 + \frac{\gamma}{2} \right) t} |++\rangle + \sqrt{2} e^{\frac{i}{4} \gamma t} |+-\rangle + e^{\frac{i}{2} \left( 2 - \frac{\gamma}{2} \right) t} |--\rangle \right) .$$

Si medimos  $\sigma_z$  en la primera partícula y obtenemos  $+1$ , el estado se reduce a:

$$|\psi(t)\rangle_{red} = N \left[ e^{-\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t} |++\rangle + \sqrt{2}e^{\frac{i}{4}\gamma t} |+-\rangle \right],$$

siendo  $N$  una constante de normalización, que debe de satisfacer:

$$N^2(1+2) = 1 \implies N = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Entonces, el estado reducido es:

$$|\psi(t)\rangle_{red} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ e^{-\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t} |++\rangle + \sqrt{2}e^{\frac{i}{4}\gamma t} |+-\rangle \right].$$

Obtengamos ahora el valor medio de  $S_{2x} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{2x}$  en el estado  $|\psi(t)\rangle_{red}$ . Puesto que  $\sigma_{2x}|++\rangle = |+-\rangle$  y  $\sigma_{2x}|+-\rangle = |++\rangle$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \langle S_{2x} \rangle &= \langle \psi(t) | \sigma_{2x} | \psi(t) \rangle_{red} = \\ &= \frac{1}{3} \left[ e^{\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t} \langle ++ | + \sqrt{2}e^{-\frac{i}{4}\gamma t} \langle +- | \right] \left[ e^{-\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t} |++\rangle + \sqrt{2}e^{\frac{i}{4}\gamma t} |+-\rangle \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ e^{\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t + \frac{i}{4}\gamma t} + e^{-\frac{i}{2}(2+\frac{\gamma}{2})t - \frac{i}{4}\gamma t} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \left[ \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)t \right]. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\langle S_{2x} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \left[ \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)t \right] \hbar,$$

que es el resultado que estamos buscando.

**[18]** Sea  $\rho(t)$  la matriz densidad de un sistema en el instante de tiempo  $t$ . Se define su pureza  $\xi(t)$  como:

$$\xi(t) = \text{Tr}(\rho^2(t)).$$

Obtengase la variación temporal de  $\xi(t)$  suponiendo que la evolución temporal de los estados está generada por un operador unitario.

## Solucion

Si el operador unitario de evolución temporal es  $U(t)$ , entonces:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{-1}(t)$$

Entonces:

$$\rho^2(t) = U(t) \rho(0) U^{-1}(t) U(t) \rho(0) U^{-1}(t) = U(t) \rho^2(0) U^{-1}(t) .$$

Tomemos la traza y utilicemos la propiedad ciclica de esta:

$$\xi(t) = \text{Tr} \left[ U(t) \rho^2(0) U^{-1}(t) \right] = \text{Tr} \left[ U^{-1}(t) U(t) \rho^2(0) \right] = \text{Tr} \left[ \rho^2(0) \right] .$$

Asi pues:

$$\xi(t) = \xi(0) ,$$

y la pureza se conserva en la evolucion temporal unitaria.

Obtengamos el mismo resultado calculando la derivada temporal de  $\xi(t)$  usando:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] .$$

Calculimos en primer lugar la derivada temporal de  $\rho^2$ :

$$\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \rho + \rho \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left( [H, \rho] \rho + \rho [H, \rho] \right) .$$

Tomando la traza, obtenemos la derivada de la pureza:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\xi}{dt} &= \text{Tr} \left( [H, \rho] \rho + \rho [H, \rho] \right) = \text{Tr} \left( (H\rho - \rho H)\rho + \rho(H\rho - \rho H) \right) = \\ &= \text{Tr} (H\rho^2 - \rho^2 H) = \text{Tr} ([H, \rho^2]) . \end{aligned}$$

Pero, dados dos operadores arbitrarios  $A$  y  $B$ , la traza de su conmutador es nula:

$$\text{Tr}([A, B]) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 ,$$

debido a la propiedad ciclica de la traza. Asi pues  $\text{Tr}([H, \rho^2]) = 0$  y por lo tanto:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0 \quad \implies \quad \xi(t) = \text{constante} = \xi(0) ,$$

que es el mismo resultado que el obtenido por el metodo anterior.